



MATHS

BOOKS - SHREE BALAJI MATHS (HINDI)

संबंध एवं फलन

उदाहरण

1. सिद्ध कीजिय की एक समतल में स्थिर सभी त्रिभुजों के सम्बन्ध में कतहँ 'सर्वगासम है' के द्वारा परिभाषित सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध है ।



उत्तर देखें

2. पूर्णाकों के समुच्चय Z में सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है

$$R = \{(a, b) : (a - b) \text{ } \} \text{ दिखाइए की } R, Z \text{ में एक}$$

तुल्यता सम्बन्ध है ।



उत्तर देखें

3. धनपूर्णाकों के समुच्चय N में कोई सम्बन्ध $R, N \times N$ पर इस

प्रकार परिभाषित है, की ---

$$(a, b)R(c, d) \Rightarrow a + d = b + c, (a, b), (c, d) \in N \times N$$

तो सिद्ध कीजिये R तुल्यता सम्बन्ध है ।



उत्तर देखें

4. प्राकृतिक संख्याओं के सउछी N में संबंघ R इस प्रकार परिभाषित है, की $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$ तब दिखाइए की R सावतुलाय व् सक्रामक है, परन्तु सम्मिट नहीं है ।

 उत्तर देखें

5. यदि X वास्तविक संख्याओं का समुख्य है, तो सिद्ध कीजिय की सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a \in X, b \in X, a = b\}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है

 उत्तर देखें

6. माना N प्रकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा $(a, b)R(c, d)$ यदि और केवल यदि $ad(b + c) = bc(a + d)$

जांच कीजिय की $R, N \times N$ में तुल्यता सम्बन्ध है या नहीं।

 उत्तर देखें

7. माना $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$ तथा समुच्चय A में R एक सम्बन्ध निम्न प्रकार परिभाषित है की

$$R = \{(a, b) : (a - b) = 4 \text{ का गुणज}\}$$

सिद्ध कीजिय की R एक तुल्यता सम्बन्ध है उन सभी तत्वों का समुच्चय ज्ञात कीजिय जो 1 से सम्बंधित है

 उत्तर देखें

8. माना समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ का विभाजन इसके उपसमुच्चयों $\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4\}, \{5\}$ द्वारा किया गया है। A में संभव $R = \{(a, b) : a \text{ व } b \text{ समुच्चय } A \text{ के विभाजन से प्राप्त एक ही उपसमचही में है}\}$ को परिभाषित कीजिय तथा सिद्ध कीजिय की यह A में एक तुल्यता सम्बन्ध कीजिय की यह A में एक तुल्यता सम्बन्ध है। A के उन सभी तत्वों के समुच्चय ज्ञात कीजिय क्रमशः 6 व 5 से सम्बन्धित है



उत्तर देखें

9. माना N सभी प्रकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा माना R, N में सम्बन्ध है और इस प्रकार परिभाषित है ----

$R = \{(a, b) : a, b \text{ का एक गुणांक है} \}$

दर्शाइए की R सावतुल्य, संक्रामक है परन्तु समिट नहीं है।

 उत्तर देखें

10. माना N सही प्रकृत संख्याओं का समुच्चय है और $R, N \times N$

पर सम्बन्ध है तथा इस प्रकार परिभाषित है --

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

दर्शाइए की R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

 उत्तर देखें

11. माना R_1 व R_2 , A पर दो तुल्यता सम्बन्ध है । दर्शय की $R_1 \cap R_2$ भी A पर तुल्यता सम्बन्ध है ।

 उत्तर देखें

12. माना $A = \{x \in R: -1 \leq x \leq 1\} = B$

दिखाइए की $f: A \rightarrow B$ जोकि निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x) = x \quad x$$

इक्केकी आच्छादक (one - one onto) है ।

 उत्तर देखें

13. माना $A = \{1, 2\}$, A से A पर एकेकी फलां ज्ञात करो ।

 उत्तर देखें

14. यदि $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 4x^3 - 7$ द्वारा परिभाषित कोई फलां हो तो दिखाइए की f एकेकी आच्छादक फलां है

 उत्तर देखें

15. एक प्रतिचित्रण $f: R \rightarrow R$ इस प्रकार है की $f(x) = 3x + 2 \forall x \in R$ इस प्रकार है की यह एक एकेकी प्रतिचित्रण है

 उत्तर देखें

 उत्तर देखें

16. माना $A = \{-1, 1, 2\}$ तथा $B = \{1, 16\}$ तथा $f: A \rightarrow B$ पर एक फलां इस प्रकार परिभाषित है, की $f(x) = x^4$ दिखाइए की यह फलां आच्छादक (onto) है ।

 उत्तर देखें

17. माना $A = \{-2, 2, -3, 3\}$ तथा $B = \{1, 4, 8, 9\}$ तथा एक फलां $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है । दिखाइए की यह एक बहुएक (many one) फलां है ।

 उत्तर देखें

18. माना A व B दो समुच्चय हैं तथा $f: A \times B \rightarrow B \times A$ इस प्रकार है, कि $f(a, b) = (b, a)$ तो सिद्ध कीजिये कि f एक एकेकी आच्छादक (one - one onto) फलन है ।

 उत्तर देखें

19. सिद्ध कीजिये कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है $f(x) = |x| + x$ आच्छादक (onto) नहीं है

 उत्तर देखें

20. सिद्ध कीजिये कि $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ से परिभाषित प्रतिचित्रण $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जहां \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

है, न एकेकी है और न ही आच्छादक |

 उत्तर देखें

21. दर्शाइए की फलन $f: R \rightarrow R$ जबकि $f(x) = |x|$ न तो एकेकी है न ही अछहादक है ।

 उत्तर देखें

22. किसी वास्तविक संख्या x के लिए, $[x] =$ महत्तम पुराणक $\leq x$ को परिभाषित करता है । सिद्ध कीजिय की महत्तम पूर्णांक फलन $f: R \rightarrow R: f(x) = [x]$ ना तो एकेकी है और न ही आच्छादक है

 उत्तर देखें

 उत्तर देखें

23. दर्शाई की फलन $f: N \rightarrow N$ जो की

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \\ x-1, & x \end{cases}$$

से परिभाषित है एकेकी व आच्छादक है

 उत्तर देखें

24. दिखाइए की $f: N \rightarrow N$ जबकि

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ odd} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ even} \end{cases}$$

एक बहु-एक आच्छादक फलां है |

 उत्तर देखें

25. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $f: A \rightarrow A$ व

$g: A \rightarrow A$, निम्न प्रकार परिभाषित फलाना है ---

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 1$$

तथा

$$g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2, g(5) = 3$$

fog तथा gof के मान ज्ञात कीजिय |

 उत्तर देखें

26. यदि $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x - 2|$, तब gof तथा

fog के मान ज्ञात कीजिय

 वीडियो उत्तर देखें

27. माना $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $x \in R$ के

लिए परिभाषित फलां है तब a व् b के मान ज्ञात कीजिय यदि

$$f \circ f = I_R$$

 उत्तर देखें

28. माना $f: Z \rightarrow Z$, $f(x) = 3x$, $x \in Z$ द्वारा परिभाषित है

तथा $g: Z \rightarrow Z$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x, 3 \\ 0, & x, 3 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिय की $f \circ g = I_Z$ तथा $f \circ g \neq I_Z$

 उत्तर देखें

29. माना $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$ दो फलन इस प्रकार परिभाषित है की

$f \circ g(x) = \sin x^2$ व $g \circ f(x) = \sin^2 x$ तब $f(x)$ व $g(x)$ के मान ज्ञात कीजिय

 उत्तर देखें

30. यदि f व g , समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर दो फलन निम्नलिखित प्रकार परिभाषित है

$$f = \{(1, 4), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$$

$$\text{तथा } g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$$

तब निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिय

(i) fog

(ii) gof



उत्तर देखें

31. यदि $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित एक फलन है दर्शाइए की f^{-1} अस्तित्व में है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिय।



उत्तर देखें

32. माना R^+ सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $f: R^+ \rightarrow R^+$ जबकि $f(x) = e^x \quad \forall x \in R$ दर्शाइए की f व्युत्क्रमणीय है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिय

 उत्तर देखें

33. माना $f: R \rightarrow R$ जबकि $f(x) = 10x + 7$, फलन $g, R \rightarrow R$ ज्ञात कीजिए जबकि $gof = fog = I_R$

 उत्तर देखें

34. माना $f: N \rightarrow Y$ जबकि $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$
तथा $y = (f)$

दर्शाइए की f व्युत्क्रमणीय है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिय ।

 उत्तर देखें

35. माना $f: Z \rightarrow Z$ जबकि

$$f(n) = \begin{cases} (n - 1) \\ (n + 1) \end{cases}$$

दर्शाइए की f व्युत्क्रमणीय है व् f^{-1} ज्ञात कीजिय

 उत्तर देखें

36. माना $f: N \rightarrow N$ पर $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ द्वारा परिभाषित एक फलां है सिद्ध कीजिय की $f: N \rightarrow S$ एक व्युत्क्रमणीय फलां है जहां S फलन का परिसर है f का व्युत्क्रम भी ज्ञात कीजिय तथा $f^{-1}(43)$ और व् $f^{-1}(163)$ का मान ज्ञात कीजिय |

 उत्तर देखें

अभ्यास प्रश्न 1 1

1. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय S में सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है की $R = \{(a, b) : (1 + ab) > 0\}$ सिद्ध कीजिय की R , सावतुल्य व् सम्मित है परन्तु क्रनक्रम नहीं ।

 उत्तर देखें

2. यदि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय S में सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है की $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ तो दिखाइए की R सावतुल्य है , न समित है और न ही संक्रामक ।

 उत्तर देखें

अभ्यास प्रश्न 1 2

1. यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्छती है, तो सिद्ध कीजिय कि फलां जो इस प्रकार परिभाषित हो

$$f: R \rightarrow R, f(x) = e^x, x \in R$$

एकेकी प्रतिचित्रण है

 उत्तर देखें

2. यदि $A = R - \{3\}$ तथा $B = R - \{1\}$ तो सिद्ध कीजिय

कि फलां $f: A \rightarrow B$ जहां $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$ एकेकी आच्छादक

(one - one onto) फलन है

 उत्तर देखें

3. यदि $f: X \rightarrow Y$ एक प्रतिचित्रण है तथा $A \subseteq X, B \subseteq Y$,
तो सिद्ध कीजिय कि

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

 उत्तर देखें

4. यदि $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$ इस प्रकार परिभाषित है,
की $f(x) = x + 2$ तथा $g(x) = 2x^2 + 5$

 उत्तर देखें

5. दिया $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$ दो प्रतिचित्रण है, जो $f(x) = 2x$ और $g(x) = x^2 + 2$ से परिभाषित है तो $f \circ g$ व $g \circ f$ के मान ज्ञात कीजिय

 उत्तर देखें

6. यदि $g(x) = e^x$ तथा $f(x) = x^2$ तो सिद्ध कीजिय की $(g \circ f) = e^{x^2}$ तथा $f \circ g = e^{2x}$

 उत्तर देखें

अभ्यास प्रश्न 13

1. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में प्राचित्रण

$f(x) = \sin x, x \in R$ तथा $g(x) = x^2, x \in R$ द्वारा

परिभाषित है सिद्ध कीजिय की $gof \neq fog$

 उत्तर देखें

2. यदि $f: R - \{0\} \rightarrow R - \{0\}$ एक रलन है जबकि

$f(x) = \frac{3}{x}$ तब f^{-1} ज्ञात कीजिय।

 उत्तर देखें

3. यदि $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b, a, b \in R$ द्वारा

परिभाषित फलां है तब a व् b के मान ज्ञात कीजिय जबकि

$$f \circ f = I_R$$

 उत्तर देखें

4. निम्नलिखित फलनों के प्रतिलोम ज्ञात कीजिय ---

$$(i) f(x) = -\frac{x}{3} + 4$$

$$(ii) f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(iii) f(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$$

 उत्तर देखें

5. माना $A = \left\{ x, x \in R, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ तथा

$$B = \{y: y \in R, -1 \leq y \leq 1\}$$

दर्शाओ की फलां $f: A \rightarrow B$ जबकि $f(x) = \sin x$

व्यूत्क्रमणीय है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिय।

 उत्तर देखें

6. माना $f: [-1, 1] \rightarrow y$ जबकि

$f(x) = \frac{x}{x+2}$, $\neq -2$ तथा $Y =$ परिसर (f) दर्शाइए की f

व्यूत्क्रमणीय है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिय

 उत्तर देखें

7. यदि $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ तो सिद्ध कीजिय $(f \circ f^{-1})(x) = x$

 उत्तर देखें

