SET-2

समय : 1 घंटा 10 मिनट | पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min. | **Full Marks : 40**

खण्ड – I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। **40 × 1 = 40**

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. **40 × 1 = 40**

1. यदि $A = \{1,2,3\}$ तथा R, A पर एक संबंध है ताकि $R = \{(2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (3,1), (2,1)\}$ तो R है

What type of a relation is R, where $R = \{(2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (3,1), (2,1)\}$.

(A) स्वतुल्य (reflexive)(B) सममित (symmetric)(C) तुल्यता (equivalance) (D) संक्रामक (transetive)

2. यदि $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$ तथा $f = \{(a, 1), (b, 2), (c,2)\}$ तो f हैं।

If $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$, $f = \{(a, 1), (b, 2), (c,2)\}$ then what type of a function is f ?

(A) एकैकि अनाच्छादक (one-one onto) (B) बहु-एक अनाच्छादक (many-one into)

(C) बहु-एक अनाच्छादक (many-one onto) (D) एकैकि अनाच्छादक (one-one onto)

3. $F : A \to B$ एक अनाच्छादक फलन है यदि

$F : A \to B$ will be an into function, if

(A) $f(A) \subset B$ (B) $f(A) = B$ (C) $BC + (A)$ (D) $F(B) \subset A$

4. यदि $A = \{1,2\}$ समुच्चय A पर कितने दिआधारी संक्रियाएँ परिभाषित होगी?

Let $A = \{1,2\}$ how many binary operations can be defined on this set ?

(A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 20

5. यदि $A = \{1,2,3\}$ तो समुच्चय A पर कितने तुल्यता संबंध परिभाषित होगी?

Let $A = \{1,2,3\}$. How many equivalence relations can be defined on A containing (1,2) ?

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

6. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ = का मान होगा

If $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ then $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ =

(A) 0 (B) abc (C) $-abc$ (D) $a + b + c$

7. प्रथम 6 धनात्मक पूर्णांक को लेते हुए असमान अवयव रखने वाले कितने भिन्न आव्यूह बनाये जा सकते है?

How many different matrices of unequal elements can be made by having the first 6 positive integers as elements ?

(A) 1880 (B) 1440 (C) 720 (D) 4

8. यदि A एक 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो $|adj\ A| =$

Let A be a non-singular matrix of the order 2×2 then $|adj\ A| =$

(A) $2|A|$ (B) $|A|$ (C) $|A|^2$ (D) $|A|^3$

9. यदि A, B और C क्रमशः $2 \times 3, 4 \times 3$ तथा 2×4 क्रम के आव्यूह है तो इनमें से किसका गुणनफल निकाला जा सकता है?

If A, B and C are matrices of order 2×3, 4×3 and 2×4 respectively then which of the products can be obtained ?

(A) AB (B) BA (C) CA (D) CB

10. 0 और 1 का प्रयोग करके 3×3 क्रम के कितने भिन्न-भिन्न आव्यूह बनाये जा सकते हैं?

How many different matrices of order 3×3 can be made with 0 and 1 ?

(A) 18 (B) 81 (C) 512 (D) 27

11. यदि $y = \log \sin x^2$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा।

If $y = \log \sin x^2$, $\frac{dy}{dx}$ at $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ equals

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\sqrt{\pi}$

12. यदि $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ का अधिकतम मान x के किस मान पर प्राप्त होगा।

The maximum value of $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ is at what value of x

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

13. यदि $y = x^2 \cdot e^{-x}$ तो वह अंतराल, जिसमें y,x के सापेक्ष बढ़ता है, होगा।

Let $y = x^2 \cdot e^{-x}$ then the interval in which y increases with respect to x is

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2,\infty)$ (D) $(0,2)$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx =$

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ (D) None

15. यदि $a > 0$ तो $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx$ का मान है

If $a > 0$ then $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx$

(A) π (B) $a\pi$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 2π

16. $\int_1^5 \frac{x^2}{x^2-4}dx =$

(A) $2-\log e^{\frac{15}{7}}$ (B) $2+\log e^{\frac{15}{7}}$ (C) $2+\log e^3+4\log e^5$ (D) None

17. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx =$

(A) $\log 2$ (B) $\log\frac{1}{2}$ (C) $\pi \log 2$ (D) $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

18. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx}+y=0$ का एक हल है।

A solution of the differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx}+y=0$ is

(A) $y=2$ (B) $y=2x$ (C) $y=2x-4$ (D) $y=2x^2-4$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^3 x} =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

20. वक्र $y^2=2c\left(x+\sqrt{c}\right)$ जहाँ c स्वैच्छिक नियतांक है, को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण होगा।

The differential equation representing the family of curves $y^2=2c\left(x+\sqrt{c}\right)$ where c is a positive.

(A) 1 कोटि का (Order 1) (B) 2 कोटि का (order 2)

(C) 3 कोटि का (order 3) (D) None

21. यदि $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ तथा $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ तो

If $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ and $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ then

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (B) $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$ (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$ (D) $\vec{a}\perp\vec{b}$

22. यदि $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 6\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ और $14\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ क्रमशः बिन्दुओं A,B तथा C के स्थिति सदिश है तो

If $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 6\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ and $14\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ be the position vector of the points A, B and C respectively, then

(A) A, B और C सरेखी है (A, B and C are collinear)

(B) A, B और C असरेखी है (A, B and C are not collinear)

(C) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

(D) कोई नहीं (None of these)

23. यदि एक समतल का समीकरण $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ है तो इस समतल के समांतर किसी समतल का समीकरण होगा।

If $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ be the equation of the plane then the equation of any parallel to the given plane is

(A) $3x + 5y - 6z + 3 = 0$ (B) $2x - 5y - 6z + 3 = 0$

(C) $2x + 5y - 6z + k = 0$ (D) None of these

24. यदि $y = \sec(\tan^{-1}x)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है

If $y = \sec(\tan^{-1}x)$ then $\frac{dy}{dx}$

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) None of these

25. यदि $y = \sec^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right] + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right]$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है

If $y = \sec^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right] + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right]$ then $\frac{dy}{dx}$ equal to

(A) 1 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

26. दो पासों के साथ एक द्विक प्राप्त करने की संभावना है।

The chance of getting a doublet with 2 dice is

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{5}{36}$

27. यदि $y = x^2 + 3x + 4$ तो वक्र के बिन्दु (1,1) पर अभिलंब की प्रवणता है।

If $y = x^2 + 3x + 4$, then the slope of the normal to the given curve at (1,1) is

(A) 5 (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 8 (D) None of these

28. $\frac{d(k)}{dx} =$ जहाँ k एक नियतांक है (Where k is a constant)

(A) 0 (B) k (C) 1 (D) None of these

29. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx$ बराबर है (equals)

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) None of these

30. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 9y = \sin x$ की कोटि है

The order of differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 9y = \sin x$ is

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) None of these

31. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ का हल है

The solution of $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ is

(A) $y = x + k$ (B) $y^2 = x + k$ (C) $y = x^2 + kx$ (D) $y^2 = x^2 - kx$

32. मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखाओं के परिवार का अवकल समीकरण होगा

The differential equation of family of lines passing through the origin is

(A) $x\frac{dy}{dx} = y$ (B) $y\frac{dy}{dx} = x$ (C) $\frac{dy}{dx} = y$ (D) $\frac{dy}{dx} = x$

33. यदि A और B दो घटना इस प्रकार है कि $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ है।

Let A and B be two events such that $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ then $P\left(\frac{A}{B}\right)$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

34. $\int \log_c x dx$

(A) $x\log x + x + c$ (B) $x\log x - x + c$ (C) $\log x + x + c$ (D) $\log x - x + c$

35. यदि A तथा B दो घटनाएँ है ताकि $P(A) = 0.2, P(B) = 0.6$ तब $P(A \cup B) + P(A \cap B)$

If A and B are any two events such that $P(A) = 0.2, P(B) = 0.6$, then $P(A \cup B) + P(A \cap B)$

(A) 0.9 (B) 0.7 (C) 0.8 (D) None of these

36. फलन $f(x) = \sqrt{\sin^{-1} x}$ का प्रांत है

Domain of function $f(x) = \sqrt{\sin^{-1} x}$

(A) [0,1] (B) [–1,1] (C) [–1,0] (D) {0,1}

37. $\int_{-1}^{1} |x| dx$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) None of these

38. बिन्दु जहाँ पर सरल रेखा $y = x + 1$ वक्र $y^2 = 4x$ पर स्पर्श रेखा है, होगा।

The line $y = x + 1$ is tangent to the curve $y^2 = 4x$ at the point.

(A) (2, 1) (B) (1, 2) (C) (–1, 2) (D) (1, –2)

39. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ बराबर है।

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ equals

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) None of these

40. $\text{cosec}^{-1}(-2)$ का मुख्य मान है।

The principal value of $\text{cosec}^{-1}(-2)$ is

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $2\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{-\pi}{6}$

ANSWERS

1.	(B)	**2.**	(B)	**3.**	(A)	**4.**	(C)	**5.**	(C)	**6.**	(B)	**7.**	(A)	**8.**	(B)	**9.**	(D)	**10.**	(C)
11.	(D)	**12.**	(C)	**13.**	(D)	**14.**	(C)	**15.**	(C)	**16.**	(B)	**17.**	(C)	**18.**	(C)	**19.**	(D)	**20.**	(A)
21.	(C)	**22.**	(A)	**23.**	(C)	**24.**	(A)	**25.**	(D)	**26.**	(B)	**27.**	(B)	**28.**	(A)	**29.**	(B)	**30.**	(C)
31.	(C)	**32.**	(A)	**33.**	(D)	**34.**	(B)	**35.**	(C)	**36.**	(A)	**37.**	(B)	**38.**	(B)	**39.**	(A)	**40.**	(D)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट **पूर्णांक : 60**
Time : 2 Hours 05 Min. **Full Marks : 60**

लघु उत्तरीय प्रश्न
(Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित है। **8 × 4 = 32**
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks. **8 × 4 = 32**

1. सिद्ध करें कि $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

Prove that $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

2. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ और $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तो k का मान निकालें जबकि $A^2=8A+KI$

If $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ and $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ then find k so tha $A^2=8A+kI$

3. मान निकालें (Evaluate) : $\begin{vmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\end{vmatrix}$

4. समीकरण को हल करें (Solve the equation)

$2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\cos x)$

5. जब $x\cos y=\sin(x+y)$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

Find $\frac{dy}{dx}$ when $x\cos y=\sin(x+y)$

6. समाकलन करें (Integrate) : $\int e^x\cos\left(e^x\right)dx$

7. यदि $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$ तथा $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ तब $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करें।

Find the magnitude of the vector $\vec{a}\times\vec{b}$ if $\vec{a}=\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$ and $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

8. दो पासे फेंकने के क्रम में ऊपर आए अंकों का योग 8 होने की क्या प्रायिकता है, यदि मालूम हो कि दूसरे पासे पर हमेशा 4 आता है?

Two dice are thrown. Find the probability that the numbers appeared has a sum 8 if it is known that the second dice always exhibits 4.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
(Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित है। **4 × 7 = 28**

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks. **4 × 7 = 28**

9. हल करें (Solve) : $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=\left(x^2+2\right)\left(x^2+1\right)$

10. सिद्ध करें कि (Prove that) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$

11. यदि सरल रेखा $\frac{x-1}{k}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ तथा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{k}=\frac{z-1}{2}$ एक दूसरे को प्रतिछेद करती है तो k का मान क्या होगा?

If the straight line $\frac{x-1}{k}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ and $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{k}=\frac{z-1}{2}$ intersects at a point, then find the value of integer k.

12. न्यूनतमीकरण करें $Z=-3x+4y$

जबकि $x+2y\le 8$

$3x+2y\le 12$

$x\ge 0, y\ge 0$

Maximise $Z=-3x+4y$

Subject to $x+2y\le 8$

$3x+2y\le 12$

$x\ge 0, y\ge 0$

ANSWERS

1. Let $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\theta, \sin^{-1}\frac{5}{13}=\phi$ and $\sin^{-1}\frac{16}{65}=\psi$

$\therefore \quad \sin\theta=\frac{4}{5}$

$\sin\phi=\frac{5}{13}$

and $\sin\psi=\frac{16}{65}$

Hence $\cos\theta=\frac{3}{5}, \cos\phi=\frac{12}{13}$ and $\cos\psi=\frac{63}{65}$

Now $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cdot\cos\phi + \cos\theta\cdot\sin\phi$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65} = \cos\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$$

$$\therefore \quad \theta+\phi = \frac{\pi}{2}-\psi$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta+\phi+\psi = \frac{\pi}{2}}$$

Hence the result

2. We have $A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1-7 & 0+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 - 8A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & -56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-8 & 0+0 \\ -8+8 & 49-56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = -7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -7I$$

Hence on comparison $R = -7$

3. Expanding along the first row, we get

$\Delta = \cos\alpha\cos\beta(\cos\beta\cos\alpha - 0) - \cos\alpha\sin\beta(-\sin\beta\cos\alpha) - \sin\alpha(-\sin\alpha\sin^2\beta - \sin\alpha\cos^2\beta)$

$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta$

$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$

$= \cos^2\alpha\cdot 1 + \sin^2\alpha\cdot 1 = 1$

4. From the given equation

$$\tan^{-1}\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x} = \tan^{-1}(2\cos x) \text{ where } \cos^2 x < 1$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{2\cos x}{\sin^2 x} = \tan^{-1}(2\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = 2\cos x$$

$\Rightarrow \quad 2\cos x = 2\cos x\cdot\sin^2 x$

$\Rightarrow \quad 2\cos x[1-\sin^2 x] = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x\cdot\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow \quad \cos^3 x = 0$

$\cos x = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{2n\pi \pm \frac{\pi}{2}}$

5. Differentiating both sides w.r.t. x, we get

$$x \cdot (-\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot 1 = \cos(x+y)\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad -x \sin y \frac{dy}{dx} + \cos y = \cos(x+y) + \cos(x+y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left[\cos(x+y) + x \sin y\right] = \cos y - \cos(x+y)$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + x \sin y}}$$

6. Let $e^x = z$

$\therefore \quad e^x dx = dz$

$\therefore \quad I = \int e^x \cos\left(e^x\right) dx = \int \cos\left(e^x\right) e^x dx = \int \cos z dz = \sin z = \sin\left(e^x\right) + C$

7. We have

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-14+14) - \vec{j}(2-21) + \vec{k}(-2+21)$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(-19) + \vec{k}(19)$$

$$= \boxed{19\vec{j} + 19\vec{k}}$$

$$\therefore \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{0^2 + 19^2 + 19^2} = \sqrt{19^2 \times 2} = 19\sqrt{2}$$

8. Let A = Event of always 4 exhibits on second dice

= {(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)}

$n(A) = 6$

and B = Event of the numbers appeared has a sum 8.

B = {(4,4)}

$\therefore \quad A \cap B = A \cap \{(4,4)\} = \{(4,4)\}$

$n(A \cap B) = 1$

$$\boxed{P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}}$$

9. From the given equation, we have

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}y = x^2 + 2$$

Here $I.F. = {}_{e^-}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = e^{-\log(1+x^2)} = e^{\log\left(1+x^2\right)^{-1}} = \frac{1}{1+x^2}$

Hence the solution is

$$y \cdot \frac{1}{1+x^2} = \int \left(x^2+2\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \frac{\left(x^2+1\right)+1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \left\{1 + \frac{1}{1+x^2}\right\}dx$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x + \tan^{-1}x + C$$

$\Rightarrow \quad y = (1+x^2)\,(x + \tan^{-1}x + c)$

10. Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ …(i)

then $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$

Since $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx$ …(ii)

(i) + (ii)

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\sin x + \log\cos x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sin x\cos x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log\sin 2x - \log 2\right\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx - (\log 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= z, -\frac{\pi}{2}\log 2$$ …(iii)

Now we evaluate,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx$$

For this, let $2x = t$ so that $2dx = dt$

Also ($x = 0 \Rightarrow t = 0$) and $\left(x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi \right)$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int_0^{\pi} \log\sin t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin t dt$$

Here $\log\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - t\right) = \log\sin t$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt$$

for if $f(2a - x) = f(x)$, then

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

Hence $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = I$

$\therefore$ From (i),

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

Hence the result.

11. माना कि $\frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = \lambda$ है, तो इस प्रकार के व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $(1 + k\lambda, 2 + 2\lambda, 3 + 3\lambda)$ है। फिर यदि $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{k} = \frac{z-1}{2} = \mu$ लें, तो इस पर के व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $(2 + 3\mu, 3 + k\mu, 1 + 2\mu)$ है। यदि ये रेखाएँ छेदन करती हैं तो एक बिन्दु उभयनिष्ठ होगा तथा उस स्थिति में दोनों रेखा पर के व्यापक बिन्दु के निर्देशांक समान होगें।

i.e. $1 + k\lambda = 2 + 3\mu, 2 + 2\lambda = 3 + k\mu, 3 + 3\lambda = 1 + 2\mu$

$\Rightarrow$ $k\lambda - 3\mu - 1 = 0, 2\lambda - k\mu - 1 = 0, 3\lambda - 2\mu + 2 = 0$

प्रथम दो परिणाम से हम पाते हैं कि

$$\frac{\lambda}{3-k} = \frac{\mu}{-2+k} = \frac{1}{-k^2+6}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{3-k}{6-k^2}; \mu = \frac{k-2}{6-k^2}$$

ये मान तीसरे परिणाम में रखने पर,

$$3\left(\frac{3-k}{6-k^2}\right)-2\left(\frac{k-2}{6-k^2}\right)+2=0$$

$\Rightarrow \quad 9-3k-2k+4+12-2k^2=0$

$\Rightarrow \quad 2k^2+5k-25=0$

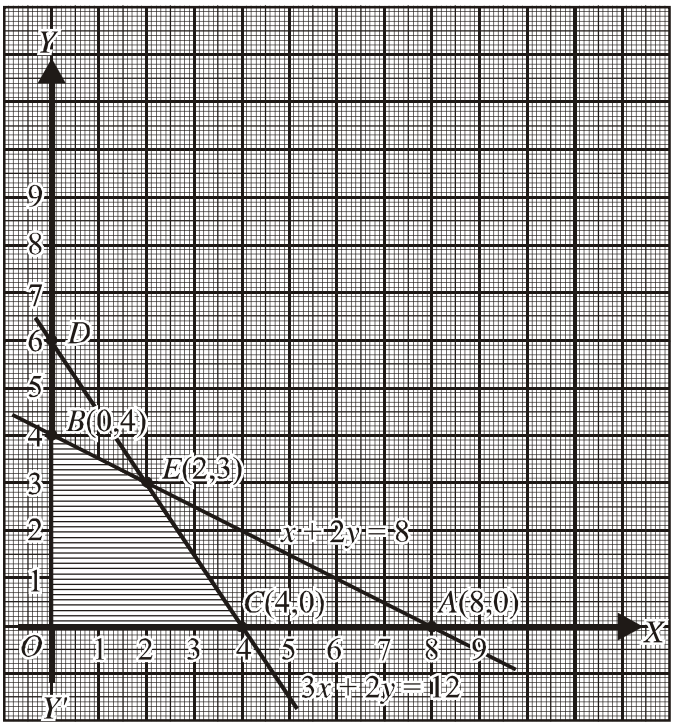
$\Rightarrow \quad 2k(k+5)-5(k+5)=0$

$\Rightarrow \quad (2k-5)(k+5)=0$

$\Rightarrow \quad k=\frac{5}{2}, k=-5$

परंतु $\frac{5}{2}$ पूर्णांक नहीं है, इसलिए यहाँ $k=-5$(पूर्णांक)

12. First of all, let us graph the feasible region of the system of in equations.



The shaded region in the figure above is the feasible region determined by the given system of constraints.

We observe that the feasible region *OCES* is bounded. So we use corner point method to determine the minimum value of z.

The co-ordinates of the corner points O,C,E,B are (0,0), (4,0), (2,3) and (0,4) respectively.
Now we evaluate $z = -3x + 4y$ at reach corner point.

Corner point	Corresponding value of $z = -3x + 4y$
(0,0)	0
(4,0)	–12 Min
(2,3)	6
(0,4)	8

Hence min. value of z is –12 at the point (–4,0).