

SET-3

समय : 1 घंटा 10 मिनट

पूर्णांक : 40

Time : 1 Hours 10 Min.

Full Marks : 40

खण्ड - I (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-I (OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

प्रश्न संख्या 1 से 40 तक निम्न में दिए गए चार विकल्पों में से एक ही उत्तर सही है। प्रत्येक प्रश्न के सही उत्तर को उत्तर तालिका में चिह्नित करें। 40 × 1 = 40

From Question No. 1 to 40 there is one correct answer. In each question you have to mark that correct option from given options. 40 × 1 = 40

1. मूल बिन्दु से तल $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ की दूरी निम्न में से किसके बराबर है।

The distance of plane $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ from origin is equal to which of the following.

- (A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 11

2. तल $2x + 3y - z = 5$ पर लम्बवत् और $(1, 1, 1)$ से गुजरनेवाली रेखा का समीकरण निम्न में से कौन है?

The equation of line through $(1, 1, 1)$ and perpendicular to the plane $2x + 3y - z = 5$ is which of the following

- (A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z-1$ (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$
 (C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$ (D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = z-1$

3. जब एक जोड़े पासे को उछाला जाता है, तो प्रत्येक पासे पर सम रूढ़ संख्या आने की प्रायिकता निम्न में से कौन है?
 The probability of obtaining an even prime number on each die, when a pair of dice is rolled is equal to which of the following?

- (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

4. यदि A और B दो घटना इस प्रकार है कि $P(A) \neq 0$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ तो निम्न में कौन सही है?

If A and B are two events such that $P(A) \neq 0$ and $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$ then which of the following is correct?

- (A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

5. $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ पर $\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ का प्रक्षेप निम्न में से कौन होगा?

The projection of $\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ on $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ is equal to which of the following?

- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $-\frac{1}{7}$ (C) 7 (D) -7

6. यदि $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ तो निम्न में से कौन सही है?

If $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ then which of the following is true?

- (A) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (B) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (C) $\vec{a} = 0$ and $\vec{b} = 0$ (D) $\vec{a} = 0$ or $\vec{b} = 0$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ निम्न में से किसके बराबर है।

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ is equal to which of the following?

- (A) $e^{\sqrt{x}}$ (B) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2}$ (C) $2 \cdot e^{\sqrt{x}}$ (D) $\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

8. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ निम्न में से किसके बराबर है?

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ is equal to which of the following?

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

9. $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ का मुख्य मान निम्न में से कौन है?

Principal value of $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ is equal to which of the following?

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) None of these

10. K एक अदिश है और A एक n -वर्ग आव्यूह है तो $|kA|$ निम्न में से किसके बराबर है?

K is a scalar and A is a n -square matrix, then which of the following is true?

- (A) $k|A|^n$ (B) $k|A|$ (C) $k^n|A|^n$ (D) $k^n|A|$

11. यदि A और B एक ही क्रम के सममित आव्यूह हैं, तो $(AB - BA)$ निम्न में से कौन है?

If A, B are symmetric matrices of same order then $AB - BA$ is which of the following?

- (A) skew-symmetric matrix (B) symmetric matrix
(C) zero matrix (D) identity matrix

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ का मान निम्न में से किसके बराबर है?

The value of $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ is equal to which of the following?

- (A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (C) $(y-x)(y-z)(z-x)$ (D) None of these

13. यदि $y = \log \{\log (\log x)\}$, तो $\frac{dy}{dx}$ निम्न में से किसके बराबर है?

If $y = \log \{\log (\log x)\}$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to which of the following ?

- (A) $\frac{1}{\log(\log x)}$ (B) $\frac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)}$ (C) $\frac{1}{x \log(\log x)}$ (D) None of these

14. यदि $y = a^x$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ निम्न से किसके बराबर है?

If $y = a^x$, then $\frac{d^2y}{dx^2}$ is equal to which of the following ?

- (A) $a^x \log a$ (B) $a^x (\log a)^2$ (C) $(a^x)^2 \cdot \log a$ (D) None of these

15. फलन $f(x) = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6$ के लिए निम्न में कौन सही है?

For the function $f(x) = 2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6$ which of the following is correct ?

- (A) only one maximum value (B) only one minimum value
(C) No maxima and Minima (D) None of these

16. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि (श्रेणी) निम्न में कौन है?

The order of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ is which of the following ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) None of these

17. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ का सामान्य हल निम्न में से कौन है?

The general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ is which of the following ?

- (A) $y = \frac{k}{x}$ (B) $y = kx$ (C) $y = k \log x$ (D) $\log y = kx$

18. y -अक्ष की दिक् कोज्याएँ होती है निम्न में से कौन है?

The direction cosine of y -axis are which of the following

- (A) (0,1,0) (B) (0,0,1) (C) (1,0,0) (D) (0,0,0)

19. बिंदु (1, -1, 1) और (-1, 1, 1) को मिलाने वाली रेखा का दिक् कोज्याएँ है निम्न में से कौन है?

The direction cosine of the line joining (1, -1, 1) and (-1, 1, 1) are which of the following ?

- (A) (2, -2, 0) (B) (1, -1, 0) (C) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ (D) None of these

20. xy -तल का समीकरण निम्न में से कौन है?

The equation of xy -plane is which of the following ?

- (A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $z = 0$ (D) $xy = 0$

21. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$, तो $\vec{a} \times \vec{b}$ निम्न में से किसके बराबर है?

If $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ then $\vec{a} \times \vec{b}$ is equal to which of the following ?

- (A) $10\hat{i} + 2\hat{j} + 11\hat{k}$ (B) $10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$ (C) $10\hat{i} - 3\hat{j} + 11\hat{k}$ (D) $10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k}$

22. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$ निम्न में से किसके बराबर है।

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$ is equal to which of the following ?

- (A) $a^2 + b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ (B) $\vec{a}^2 \vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$ (C) $\vec{a}^2 \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ (D) $\vec{a}^2 \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}$ का मान बराबर है निम्न में से किसके बराबर है?

The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}$ is equal to which of the following ?

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{\pi}{3}$

24. $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ तो निम्न में कौन-सा कथन सत्य है?

$\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ is true for which of the following ?

- (A) $f(2a - x) = -f(x)$ (B) $f(2a - x) = f(x)$ (C) $f(x)$ is an odd function (D) $f(x)$ is an even function

25. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान निम्न में से कौन है?

The value of $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ is which of the following ?

- (A) $\frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$ (B) $\frac{1}{2a} \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$ (C) $\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ (D) $\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

26. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, तो $\vec{a} + \vec{b}$ का परिमाण निम्न में से किसके बराबर है?

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 8\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ then the magnitude of $\vec{a} + \vec{b}$ is equal to which of the following ?

- (A) 13 (B) $\frac{13}{3}$ (C) $\frac{3}{13}$ (D) $\frac{4}{13}$

27. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{2}$ तो $P(A)$ का मान निम्न में से किसके बराबर है?

If A and B are independent events and $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{2}$ then the value of $P(A)$ is equal to which of the following ?

- (A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) None of these

28. यदि किसी सरल रेखा का दिक् कोज्या (k, k, k) है, तो k का मान निम्न में से कौन है?

If the direction cosine of a straight lines are (k, k, k) then value of k is which of the following ?

- (A) $k > 0$ (B) $0 < k < 1$ (C) $k = 1$ (D) $k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

29. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान निम्न में से कौन है?

$\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ is equal to which of the following ?

- (A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

30. $x(x-2)(x-4)$, $1 \leq x \leq 4$, माध्य मान साध्य को निम्न में से x के किस मान के लिए संतुष्ट करेगा?

$x(x-2)(x-4)$, $1 \leq x \leq 4$, will satisfy mean value theorem at which of the following value of x ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

31. यदि A और B वर्ग आव्यूह है तो $(AB)'$ निम्न में से किसके बराबर है

If A and B are square matrix then $(AB)'$ is equal to which of the following ?

- (A) $A'B'$ (B) $B'A'$ (C) AB' (D) $A'B$

32. यदि $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, तो (x, y) निम्न में से कौन होगा?

If $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, then (x, y) is which of the following ?

- (A) (1, 1) (B) (1, -1) (C) (-1, 1) (D) (-1, -1)

33. यदि $[A]_{m \times p}$ और $[B]_{p \times n}$ तो AB की कोटि निम्न में से कौन है?

If $[A]_{m \times p}$ and $[B]_{p \times n}$ then order of AB is which of the following ?

- (A) $m \times p$ (B) $p \times n$ (C) $p \times p$ (D) $m \times n$

34. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f = \frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणांक निम्न में से कौन है?

Integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} + f = \frac{1+y}{x}$ is which of the following ?

- (A) e^x (B) xe^x (C) $\frac{e^x}{x}$ (D) $\frac{x}{e^x}$

35. यदि $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ एक रेखा का दिक् कोज्या है, तो $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान निम्न में से किसके बराबर है?

If $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ are d.c.'s of a line, then the value of $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ is equal to which of the following ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

36. (α, β, γ) से गुजरने वाली और अक्ष पर समान कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण है

The equation of line through (α, β, γ) and equally inclined to the axes are

- (A) $x - \alpha = y - \beta = z - \gamma$ (B) $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y-1}{\beta} = \frac{z-1}{\gamma}$

- (C) $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ (D) None of these

37. यदि (i, j, k) तीन लम्बवत इकाई सदिश है, तो $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k \cdot (i \times j)$ का मान निम्न में से कौन सा है?

If (i, j, k) are three perpendicular unit vector, then the value of $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k \cdot (i \times j)$ is which of the following ?

- (A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 3

38. $\hat{j} \times \hat{i}$ का मान निम्न में से कौन-सा है?

The value of $\hat{j} \times \hat{i}$ is which of the following.

- (A) $\hat{k}$ (B) $-\hat{k}$ (C) $\hat{j}$ (D) i

39. $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$ का मान निम्न में से कौन-सा है?

The value of $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$ is which of the following ?

- (A) 0 (B) 1 (C) $\vec{a} \times \vec{b}$ (D) $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$

40. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ का मान निम्न में से कौन-सा है?

$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ equal to which of the following ?

- (A) $\tan^{-1}x$ (B) $\sin^{-1}x$ (C) $\sec^{-1}x$ (D) None of these

ANSWERS

1. (A) 2. (B) 3. (D) 4. (A) 5. (B) 6. (D) 7. (C) 8. (D) 9. (A) 10. (D)
 11. (A) 12. (B) 13. (B) 14. (B) 15. (B) 16. (B) 17. (B) 18. (A) 19. (C) 20. (C)
 21. (B) 22. (B) 23. (A) 24. (B) 25. (A) 26. (A) 27. (C) 28. (D) 29. (B) 30. (B)
 31. (B) 32. (C) 33. (D) 34. (C) 35. (B) 36. (A) 37. (C) 38. (B) 39. (A) 40. (C)

खण्ड – II (गैर – वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

SECTION-II (NON-OBJECTIVE TYPE QUESTIONS)

समय : 2 घंटा 05 मिनट
Time : 2 Hours 05 Min.

पूर्णांक : 60
Full Marks : 60

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 1 से 8 तक लघु उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 4 अंक निर्धारित हैं।
Question Nos. 1 to 8 are of short answer type. Each question carries 4 marks.

8 × 4 = 32

8 × 4 = 32

1. x के लिए हल करें (Solve for x) : $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$

2. सिद्ध करें (Prove that) :
$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

3. K के किस मान के लिए, फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ पर सतत होगा।

For what value of k , the function $f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ is continuous at $x = \frac{\pi}{2}$.

4. यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, तो $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{dy}{dx}$ प्राप्त करें।

If $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$. Find $\frac{dy}{dx}$ at $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ और $B = [1, 0, 4]$ तो $(AB)' = B'A'$ की जाँच करें।

If $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ and $B = [1, 0, 4]$ verify that $(AB)' = B'A'$.

6. अवकल समीकरण को हल करें : $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

7. यदि $\vec{a} = \lambda \hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ का अदिश प्रक्षेप $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ पर 4 इकाई है तो λ का मान ज्ञात करें।

Find λ when the scalar projection of $\vec{a} = \lambda \hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ on $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ is 4 unit.

8. यदि $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$, $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$ है तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ और $P(A \cup B)$ ज्ञात करें।

If $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$, $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$. Find $P\left(\frac{A}{B}\right)$ and $P(A \cup B)$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Question)

प्रश्न संख्या 9 से 12 तक दीर्घ उत्तरीय प्रकार के हैं। प्रत्येक के लिए 7 अंक निर्धारित हैं।

$4 \times 7 = 28$

Question Nos. 9 to 12 are of short answer type. Each question carries 7 marks.

$4 \times 7 = 28$

9. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Find the area of the smaller region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

10. रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ में बिन्दु (1,6,3) का प्रतिबिम्ब ज्ञात करें।

Find the image of the point (1,6,3) in the line $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

11. ज्ञात करें (Evaluate) : $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$

12. न्यूनतमीकरण करें $Z = 20x + 10y$

जबकि $x + 2y \geq 40$

$$3x + y \geq 30$$

$$4x + 3y \geq 60$$

$$x, y \geq 0$$

Maximise $Z = 20x + 10y$ subject to constraints

Subject to $x + 2y \geq 40$

$$3x + y \geq 30$$

$$4x + 3y \geq 60$$

$$x, y \geq 0$$

ANSWERS

1. Given that $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3} = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \sin^{-1} x - \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin^{-1} 2x$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \left[x \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - x^2} \right] = \sin^{-1} \left[x \sqrt{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - x^2} \right] = \sin^{-1} [-2x]$$

$$[\because \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - x^2} = -2x$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{3(1 - x^2)} = -4x$$

$$\Rightarrow 5x = \sqrt{3(1 - x^2)}$$

Squaring we get

$$25x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$\Rightarrow 28x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{28}$$

$$\therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

As $x = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ does not satisfy the given equation

$$\text{So, } x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

2.
$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix}$$

Taking common a from c_1 , b from c_2 and c from c_3

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2b & -2b & b \\ 0 & 2c & -c \end{vmatrix}$$

[By $c_1 \rightarrow c_1 + c_3$ & $c_2 \rightarrow c_2 - c_3$]

$$= abc \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 2b & -2b \\ 0 & 2c \end{vmatrix} = a^2 bc \times 4bc = 4a^2 b^2 c^2$$

3. Since, $f(x)$ is continuous at $x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{So } [f(x)]_{x=\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-k \sin h}{-2h} = \frac{k}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \frac{k}{2} \times 1 = \frac{k}{2}$$

$$\text{i.e. } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow k = 6$$

4. $\because x = a(\theta - \sin \theta)$

Differentiating both side w.r.t. θ

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta)$$

$$\text{and } y = a(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\text{At } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$5. \quad \because A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{and } B = [1, 0, 4]_{1 \times 3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{put } = \frac{\pi}{2} + h \\ \text{As } x \rightarrow \frac{\pi}{2}, h \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1, 0, 4] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 5 & 0 & 20 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Now, } A' = [3, 5, 2]_{1 \times 3} \text{ \& } B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\therefore B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot [3, 5, 2] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)' = B'A'$$

6. Given differential equation is $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

$$\text{or, } \frac{dy}{dx} = (1 - x) + y(1 - x) = (1 - x)(1 + y)$$

$$\text{or, } \frac{dy}{1 + y} = (1 - x)dx$$

Integrating both side, we have

$$\int \frac{dy}{1 + y} = \int (1 - x)dx$$

$$\Rightarrow \log |1 + y| = x - \frac{x^2}{2} + c$$

7. The scalar projection of $\vec{a}$ on $\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$\text{Now, } \vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda i + j + 4k) \cdot (2i + 6j + 3k) = 2\lambda + 6 \times 1 + 4 \cdot 3 = 2\lambda + 18 \text{ and } |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{But, given that } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 4$$

$$\therefore \frac{2\lambda + 18}{7} = 4$$

$$\Rightarrow 2\lambda = 28 - 18 = 10$$

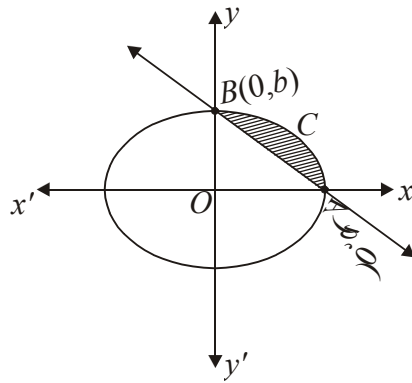
$$\therefore \lambda = 5 \text{ unit}$$

$$8. \quad \because P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

$$\text{Now, } P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.24}{0.8} = 0.3$$

$$\text{and } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.8 - 0.2 = 0.96$$

$$9. \quad \text{The given ellipse is } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ and the line is } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

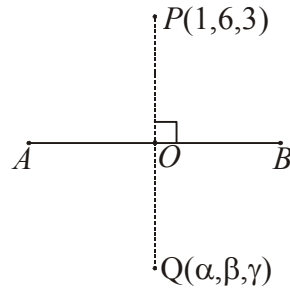


The sketch is as— The shaded region is the require area

$$\begin{aligned} \therefore \text{ar}(ABCA) &= \int_0^a (y_1 - y_2) dx \\ &= \int_0^a (y \text{ of the ellipse}) dx - \int_0^a (y \text{ of the line}) dx \\ &= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx - \int_0^a \frac{b(a-x)}{a} dx \\ &= \frac{b}{a} \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a - \frac{b}{a} \left[ax - \frac{x^2}{2} \right]_0^a \\ &= \frac{b}{a} \left[0 + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{a}{a} - 0 \right] - \frac{b}{a} \left(a^2 - \frac{a^2}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{ab}{2} \cdot \sin^{-1} 1 - \frac{b}{a} \times \frac{a^2}{2} = \left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{So, The require area} = \left(\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} \right) \text{sq. units}$$

$$10. \quad \text{Let the given line } \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \text{ be } AB.$$



Any point 'O' on line AB is given by $(k, 2k+1, 3k+2)$

So, direction ratio of the line OP are $k-1, 2k-5, 3k-1$

$$\because OP \perp AB$$

$$\therefore (k-1) \times 1 + (2k-5) \times 2 + (3k-1) \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow 14k - 14 = 0$$

$$\Rightarrow k = 1$$

Hence, co-ordinate of O are $(1, 3, 5)$

Now, Let image of $P(1, 6, 3)$ in the given line be $Q(\alpha, \beta, \gamma)$

So, 'O' is the mid point of PQ

$$\therefore \frac{\alpha+1}{2} = 1, \frac{\beta+6}{2} = 3, \frac{\gamma+3}{2} = 5$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 7$$

So, The image of P is $R(1, 0, 7)$

11. Let $I = \int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} \cdot dx$

$$\text{Let } 2 \sin x + 3 \cos x = A(3 \sin x + 4 \cos x) + B \cdot \frac{d}{dx}(3 \sin x + 4 \cos x)$$

$$= A(3 \sin x + 4 \cos x) + B \cdot (3 \cos x - 4 \sin x)$$

$$= (3A - 4B) \sin x + (4A + 3B) \cos x$$

$$\therefore 3A - 4B = 2 \text{ and } 4A + 3B = 3$$

$$\text{On solving, we have } A = \frac{18}{25} \text{ and } B = \frac{1}{25}$$

$$\therefore I = \int \frac{A(3 \sin x + 4 \cos x) + B(3 \cos x - 4 \sin x)}{3 \sin x + 4 \cos x} \cdot dx$$

$$= \int \left(A + B \cdot \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{3 \sin x + 4 \cos x} \right) dx$$

$$= \int A dx + B \int \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$$

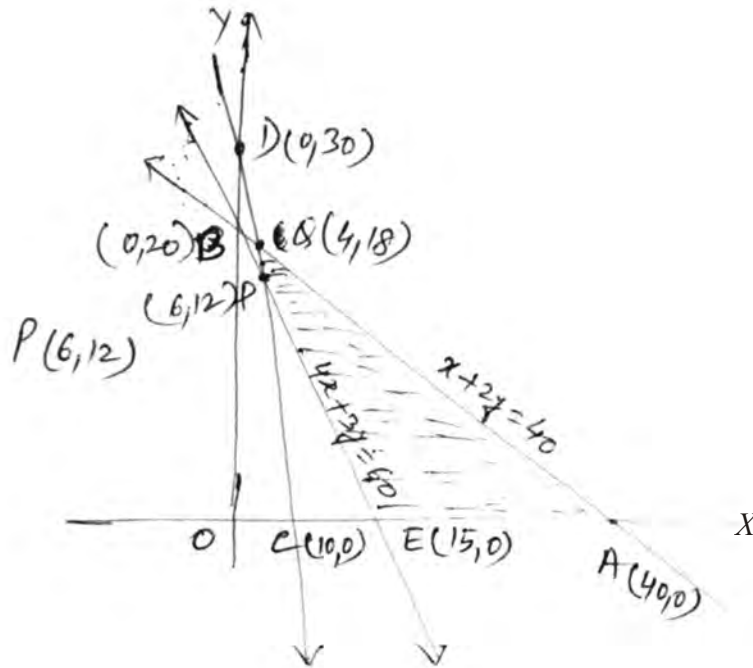
$$= \frac{18}{25} x + \frac{1}{25} \cdot \log[3 \sin x + 4 \cos x] + C$$

[Put $3\sin x + 4\cos x = t$ and evaluate the 2nd integral]

12. On changing the inequality into equation, we have

$$x + 2y = 40, 3x + y = 30, 4x + 3y = 60$$

We first draw the graph of given line



The shaded region $EAQPE$ is the feasible region.

The vertices of the feasible region are $E(15, 0)$, $A(40, 0)$, $Q(4, 18)$ and $P(6, 12)$

Now, the value of the objective function are as :

$$\text{Given, } z = 20x + 10y$$

$$\text{At } E(15, 0), z = 20 \times 15 + 10 \times 0 = 300$$

$$\text{At } A(40, 0), z = 20 \times 40 + 10 \times 0 = 800$$

$$\text{At } Q(4, 18), z = 20 \times 4 + 10 \times 18 = 260$$

$$\text{At } P(6, 12), z = 20 \times 6 + 10 \times 12 = 240$$

Obviously, z is minimum at $P(6, 12)$

Hence, $x = 6, y = 12$ is optimal solution of the given LPP and the optimal value of z is 240.